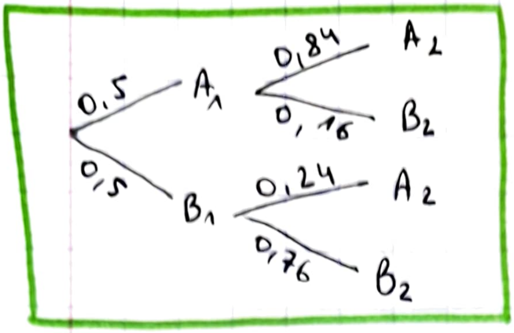
Sujet de Mathématiques 2022 – Amérique du Nord 2

Exercice 1

1)



2) a) On a :

$$a_2 = P(A_2)$$

$\{A_1 ; B_1\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle.

D'après la formule des probabilité totale, on a :

$$a_2 = P(A_1 \cap A_2) + P(B_1 \cap A_2)$$
$$= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(A_2)$$
$$= 0,5 \times 0,84 + 0,5 \times 0,24$$

$$\boxed{a_2 = 0,54}$$

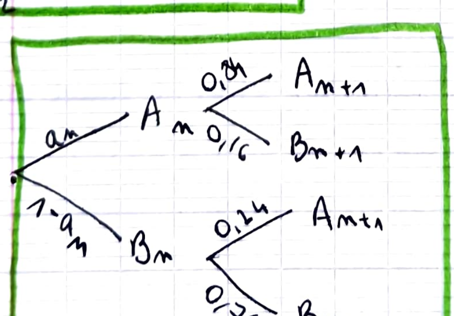
b) On cherche à calculer $P_{A_2}(B_1)$.

Comme $P(A_2) = a_2 \neq 0$, on a :

$$P_{A_2}(B_1) = \frac{P(A_2 \cap B_1)}{P(A_2)}$$
$$= \frac{0,5 \times 0,24}{0,54}$$

$$\boxed{P_{A_2}(B_1) = 0,222}$$

3) a)



b) $\{A_n ; B_n\}$ est un système complet d'évènement de probabilité non nulle.

D'après la formule des probabilités totales, on a :

$a_{n+1} = a_n \times 0,84 + (1-a_n) \times 0,24$

$= 0,84 a_n + 0,24 - 0,24 a_n$

$\boxed{a_{n+1} = 0,60 a_n + 0,24}$

4) Pour tout entier naturel non nul, on considère la proposition P_n : " $a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}$ ".
Montrons à l'aide d'un raisonnement par récurrence simple que P_n est vraie.

* Initialisation : ~~On a~~ : Montrons que P_1 est vraie
On a : $0,6 - 0,1 \times 0,6^0 = 0,6 - 0,1 = 0,1 = a_1$
Ainsi P_1 est vraie.

* Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} est vraie.

On a :

$a_{n+1} = 0,6 a_n + 0,24$
$= 0,6 \times (0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}) + 0,24$ (par hypothèse de récurrence)
$= 0,36 - 0,6 \times 0,1 \times 0,6^{n-1} + 0,24$
$= 0,6 - 0,1 \times 0,6^n$

Donc P_{n+1} est vraie.

* Conclusion : P_n est vraie pour tout entier naturel non nul par principe de récurrence simple et on a :

$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, a_n = 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1}}$

5) On a $0,6 \in]-1;1[$ donc $\lim_{n \to +\infty} 0,6^{n-1} = 0$

Ainsi $\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = 0,6}$

Au bout d'un certain temps, 60% des vélos se trouveront au point A.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$a_n \geq 0,599 \iff 0,6 - 0,1 \times 0,6^{n-1} \geq 0,599$
$\iff -0,1 \times 0,6^{n-1} \geq -0,001$
$\iff 0,1 \times 0,6^{n-1} \leq 0,001$
$\iff \underline{0 <} 0,6^{n-1} \leq 0,01$
$\iff (n-1) \ln(0,6) \leq \ln(0,01)$ (par stricte croissance de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow \quad n-1 \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} \qquad (\ln(0{,}6) < 0)$

$\Leftrightarrow \quad n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} + 1$

Or $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}6)} + 1 \approx 10{,}015$

Ainsi le plus petit entier naturel non nul n tel que $a_n \geqslant 0{,}599$ est 11.

Donc au bout du 11ème matin, la probabilité que le vélos se trouve au point A est supérieure à $0{,}599$.

Exercice 2

Partie A

1) p est dérivable sur $[-3;4]$ comme somme de fonctions qui le sont, et on a pour tout x appartenant à $[-3;4]$,

$p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$.

x	-3		4
$p'(x)$		$+$	
p	-68	$\nearrow$	37

car $\Delta = (-6)^2 - 4\times 3\times 5$

$= -24 < 0$

(pas de racine réelle)

Et • $p(3) = (-3)^3 - 3\times(-3)^2 + 5\times(-3) + 1$

$= -27 - 27 - 15 + 1$

$= 16$

• $p(4) = 4^3 - 3\times 4^2 + 5\times 4 + 1$

$= 64 - 48 + 20 + 1$

$= 37$

$\boxed{p \text{ est strictement croissante sur l'intervalle } [-3;4]}$

2) p est continue (somme de fonctions continues sur $\mathbb{R}$) et strictement croissante sur $[-3;4]$.

De plus $p([-3;4]) = [-68;37]$. Or $0 \in [-68;37]$, ainsi d'après le théorème de la bijection (ou corollaire du théorème des valeurs intermédiaires) l'équation $\boxed{p(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur } [-3;4]}$

3) On a $p(-0,3) = -0,257 < 0$ (à la calculatrice)

et $p(0,2) = 0,112 > 0$

Ainsi $\boxed{-0,3 < \alpha < -0,2}$

Rq : afficher le tableau de valeurs de la fonction entre -3 et 4 avec un pas de $0,1$ (dixième).

4)

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

1) a) f est dérivable sur $[-3 ; 4]$ comme produit de fonctions qui le sont et on a pour tout x appartenant à $[-3 ; 4]$:

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x^2) - 2x e^x}{(1+x^2)^2}$$

ie $\boxed{f'(x) = \frac{e^x(1-2x+x^2)}{(1+x^2)^2}}$

b) On a $f'(1) = \frac{e(1-2\times 1+1^2)}{(1+1^2)^2}$

$$= \frac{e \times 0}{4}$$

ie $\boxed{f'(1) = 0}$

La courbe $\mathcal{C}_f$ admet donc une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

2) a) La courbe $\mathcal{C}_f$ semble convexe sur $[-3 ; -\cancel{1,1}\ 0,3]$, puis concave sur $[-\cancel{1,1}\ 0,3 ; 1]$ et enfin à nouveau convexe sur $[1 ; 4]$.

$\boxed{\text{Ainsi la courbe } \mathcal{C}_f \text{ semble admettre deux points d'inflexion, ie le toboggan semble assurer de bonnes sensations.}}$

b) Étudions le signe de f''.

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$e^x/(1+x^2)^3$		$+$		$+$		$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

positivité de l'exponentielle

f change de convexité en α et en 1, donc $\mathcal{C}_f$ admet bien deux points d'inflexion (en α et en 1).

$\boxed{\text{Ainsi le toboggan assure de bonnes sensations}}$.

Exercice 3

1) a) On a : $\vec{AR}\begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}$, $\vec{AT}\begin{pmatrix}-3\\0\\2\end{pmatrix}$ et $\vec{RT}\begin{pmatrix}-3\\-3\\0\end{pmatrix}$.

Calculons les normes de ces vecteurs.

. $AR = \sqrt{0^2+3^2+2^2} = \sqrt{13}$

$AT = \sqrt{0^2+(-3)^2+2^2} = \sqrt{13} = AR$

$RT = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2+0^2} = \sqrt{18} \neq \sqrt{13}$

Ainsi $\boxed{\text{le triangle ART est isocèle en A}}$.

b) $\vec{AR}\cdot\vec{AT} = 0\times(-3)+3\times0+2\times2$

ie $\boxed{\vec{AR}\cdot\vec{AT} = 4}$

c) D'après la définition du produit scalaire, on a :

$\vec{AR}\cdot\vec{AT} = AR\times AT\times\cos(\vec{AR};\vec{AT})$

ie $\vec{AR}\cdot\vec{AT} = AR\times AT\times\cos(\widehat{RAT})$

Donc $\cos(\widehat{RAT}) = \dfrac{\vec{AR}\cdot\vec{AT}}{AR\times AT}$

ie $\widehat{RAT} = \cos^{-1}\left(\dfrac{\vec{AR}\cdot\vec{AT}}{AR\times AT}\right)$

$= \cos^{-1}\left(\dfrac{4}{\sqrt{13}\times\sqrt{13}}\right)$

ie $\boxed{\widehat{RAT} = 72{,}1°}$

2) a) . $\vec{n}\cdot\vec{AR} = 2\times0+(-2)\times3+3\times2 = 0$

. $\vec{n}\cdot\vec{AT} = 2\times(-3)+(-2)\times0+3\times2 = 0$

$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ART)

donc $\boxed{\vec{n}\text{ est normal au plan (ART)}}$

b) $\vec{n}$ étant normal au plan (ART), on a pour tout point $M(x;y;z)$ du plan : $2x-2y+3z+d=0$

avec $d\in\mathbb{R}$ à déterminer.

Or $A \in (ART)$, donc on a :

$$2 \times 6 + (-2) \times 0 + 3 \times 2 + d = 0 \iff 18 + d = 0$$
$$\iff d = -18.$$

Ainsi une équation cartésienne du plan (ART) est :
$$\boxed{2x - 2y + 3z - 18 = 0}$$

3) a) Δ est orthogonale au plan (ART) donc un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. De plus $S(3 ; 5/2 ; 0) \in \Delta$.

Ainsi une représentation paramétrique de Δ est :

$$\boxed{\Delta : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}}$$

b) Soit $L(x ; y ; z)$. ~~Soit t~~ L vérifie le système (avec t à déterminer)

$$\begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 2x - 2y + 3z - 18 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 2(3+2t) - 2(5/2 - 2t) + 3(3t) - 18 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ 17t - 17 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5/2 - 2t \\ z = 3t \end{cases} \\ t = 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \begin{cases} x = 5 \\ y = 1/2 \\ z = 3 \end{cases} \\ t = 1 \end{cases}$$

D'où $\boxed{L(5 ; 1/2 ; 3)}$

4) Soit $t \in [0 ; 1]$, on a $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$

On a pour tout $t \in [0 ; 1]$, $\overrightarrow{DN} = t \times \overrightarrow{DK}$.

Donc pour tout $t \in [0 ; 1]$, $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires, les points D, N et K sont donc alignés.

Ainsi pour tout t appartenant à $[0 ; 1]$, N appartient au segment $[DK]$

5) ~~On a $\vec{SL}$~~

Soit $t \in [0;1]$. On a :

$\vec{SL}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{SN}\begin{pmatrix}-3\\11/2-4t\\4t\end{pmatrix}$.

$[SL]$ et $[SN]$ perpendiculaires $\iff \vec{SL}\cdot\vec{SN}=0$

$\iff 2\times(-3)+(-2)\times(11/2-4t)+3\times 4t=0$

$\iff -6-11+8t+12t=0$

$\iff -17+20t=0$

$\iff t=\dfrac{17}{20}$.

Ainsi les deux rayons lasers sont perpendiculaires si on a $N(0;\ 2{,}3/5;\ 17/5)$

Exercice 4

Q1) Réponse d

Justifications :

$a=\ln(9)+\ln(\sqrt{3}/3)+\ln(1/9)$

$=\cancel{\ln(9)}+\ln(\sqrt{3}/3)+\underbrace{\ln(1)}_{0}-\cancel{\ln(9)}$

$=\ln(\sqrt{3})-\ln(3)$

$=\dfrac{1}{2}\ln(3)-\ln(3)$

$\boxed{a=-\dfrac{1}{2}\ln(3)}$

Q2) Réponse ~~b~~ c

Justifications : (E) est définie sur $]10;+\infty[$ (car $x-10>0$ pour que (E) existe).

Soit $x\in]10;+\infty[$.

$\ln(x)+\ln(x-10)=\ln(3)+\ln(7)$

$\iff \ln(x(x-10))=\ln(21)$

$\iff \ln(x^2-10x)=\ln(21)$

$\iff x^2-10x=21$ (par stricte croissance de la fonction $x\mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$)

$\iff x^2-10x-21=0$

$\iff x=\dfrac{10-2\sqrt{46}}{2}$ ou $x=\dfrac{10+2\sqrt{46}}{2}$ (car $\Delta=184=4\times46$)

$\iff \underbrace{x=5-\sqrt{46}}_{<0 \text{ donc pas solution}}$ ou $\boxed{x=5+\sqrt{46}}$

Q3) $\boxed{\text{Réponse d}}$

Justification : f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme produit de fonction qui le sont et on a

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = 2x(-1+\ln(x)) + \frac{1}{x} \times x^2$$

ie $$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = -x + 2x\ln(x)$$
$$= x(2\ln(x)-1)$$

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
x	‖	$+$		$+$	
$2\ln(x)-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Soit $x \in]0;+\infty[$.

car $f'(x) = 0 \iff x(2\ln(x)-1) = 0$
$\iff x = 0$ ou $2\ln(x) - 1 = 0$
$\iff \ln(x) = 1/2$ (car $x \in]0;+\infty[$.)
$\iff x = e^{1/2}$ (par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.)
$= \sqrt{e}$

La tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\sqrt{e}$ a pour équation : $y = \underbrace{f'(\sqrt{e})}_{=0}(x-\sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

ie $y = f(\sqrt{e})$
$= (e^{1/2})^2 \times (-1 + \ln(\sqrt{e}))$
$= e \times (-1/2)$

ie $\boxed{T : y = -\frac{1}{2}e}$

Q4) $\boxed{\text{Réponse b}}$

Justification On réalise 5 fois une épreuve de Bernoulli de manière identique et indépendante (tirage avec remise) dont le succès "obtenir un jeton jaune" a pour probabilité $2/5$

Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Alors $X \hookrightarrow \mathcal{B}(5\,;2/5)$.

On a $P(X=2) = \binom{5}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 \approx 0{,}346$

Q5) $\boxed{\text{Réponse d}}$

Justification : On reprend la variable aléatoire X précédente.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$

$= 1 - P(X = 0) = 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{2}{5}\right)^0\left(\frac{3}{5}\right)^5 \approx 0,922$

Q6) $\boxed{\text{Réponse c}}$

Justification : En reprenant la variable aléatoire X précédente.

$E(X) = 5 \times \frac{2}{5} = 2$

Sur un très grand nombre de répétition, en moyenne deux jetons jaunes auront été tirés.