CORRIGÉ

Mathématiques

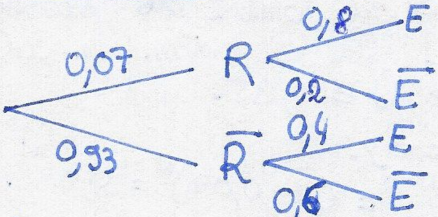
Amérique du Nord 2024 - Jour 1.

Exercice 1 :

Partie A :

D'après l'énoncé : $P(R)=0{,}07$; $P_R(E)=0{,}8$ et $P_{\overline{R}}(E)=0{,}4$.

1.-



$P(\overline{R}) = 1 - P(R) = 1-0{,}07 = 0{,}93$

$P_R(\overline{E}) = 1 - P_R(E) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$

$P_{\overline{R}}(\overline{E}) = 1 - P_{\overline{R}}(E) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

Par définition d'une probabilité conditionnelle :

$P(R\cap E) = P(R)\times P_R(E) = 0{,}07\times 0{,}8$ donc : $\boxed{P(R\cap E) = 0{,}056.}$

2.- On cherche $P(E)$.

R et $\overline{R}$ forment un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a :

$P(E) = P(E\cap R) + P(E\cap \overline{R}) = P(E\cap R) + P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(E)$

Donc : $P(E) = 0{,}056 + 0{,}93\times 0{,}4$. $P(E) = 0{,}428$.

$\boxed{\text{La probabilité de tirer une épée est de } 0{,}428.}$

3.- On cherche $P_E(R)$.

Par définition : $P_E(R) = \dfrac{P(R\cap E)}{P(E)}$ $\quad P_E(R) = \dfrac{0{,}056}{0{,}428} \simeq 0{,}131$ au millième près.

$\boxed{\text{La probabilité que le joueur ait tiré un objet rare sachant qu'il a tiré une épée est d'environ } 0{,}131.}$

Partie B :

1.- Tirer un objet est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « on tire un objet rare » de probabilité 0,07.

On répète 30 fois cette épreuve de façon identique et indépendante.

On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n=30$ et $p=0{,}07$.

La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (le nombre de fois où un objet rare est tiré) suit donc $\boxed{\text{la loi binomiale } \mathcal{B}(30;0{,}07)}$.

$E(X) = np$ donc $\boxed{E(X) = 30\times 0{,}07 = 2{,}1.}$

2.- $P(X<6) = P(X\leq 5)$.

D'après la calculatrice, $P(X\leq 5)\simeq 0{,}984$ au millième près.

Donc : $\boxed{P(X<6)\simeq 0{,}984}$ au millième près.

3.- Pour tout $k\in\mathbb{N}$, $P(X\geq k) = 1 - P(X<k) = 1 - P(X\leq k-1)$.

D'après la calculatrice, $1-P(X\leq 1)\simeq 0{,}631 \geq 0{,}5$

$1-P(X\leq 2)\simeq 0{,}351 < 0{,}5$

Or, on cherche le plus grand $k\in\mathbb{N}$ tel que : $P(X\geq k)\geq 0{,}5$ soit $1-P(X\leq k-1)\geq 0{,}5$

On a donc : $k-1=1$ donc $\boxed{k=2}$. On a moins d'1 chance sur 2 de tirer plus de 2 objets rares.

④ Soit Y la variable aléatoire qui compte, sur les N tirages, le nombre d'objets rares obtenus.
Tirer un objet est une épreuve de Bernoulli dont le succès est : « on tire un objet rare » de probabilité 0,07.
On répète N fois cette épreuve de façon identique et indépendante. On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres N et $p = 0,07$.
La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès (le nombre d'objets rares obtenus) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(N;0,07)$.
On cherche $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $P(Y \geq 1) \geq 0,95$.

$P(Y\geq 1) = 1 - P(Y<1) = 1 - P(Y=0)$.

Or, $P(Y=0) = \binom{N}{0} \times 0,07^0 \times (1-0,07)^{N-0} = (1-0,07)^N = 0,93^N$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $P(Y \geq 1) \geq 0,95 \iff 1 - P(Y=0) \geq 0,95$

$\iff 1 - 0,93^N \geq 0,95$

$\iff 0,93^N \leq 0,05$.

$\iff \ln(0,93^N) \leq \ln(0,05)$ car la fonction ln est croissante sur $]0;+\infty[$.

$\iff N\ln(0,93) \leq \ln(0,05)$

$\iff N \geq \dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)}$ car $0,93 < 1$ donc $\ln(0,93) < 0$

D'après la calculatrice, $\dfrac{\ln(0,05)}{\ln(0,93)} \simeq 41,28$.

Donc, $N \geq 42$. $\boxed{\text{Ainsi, il faut effectuer au minimum 42 tirages pour que la probabilité d'obtenir au moins un objet rare soit supérieure ou égale à 0,95.}}$

Exercice 2 : Les justifications ne sont pas demandées.

① On remarque que $y_A = 0 \neq 1$, donc on peut déjà éliminer les réponses a et d qui ne conviennent pas.
De même $z_B = 0 \neq 3$ donc la réponse b. ne convient pas.
Par déduction, $\boxed{\text{réponse c.}}$

② En résolvant l'équation $y = 6t$ pour les points M, N et P, on trouve $t = 1$. Or, avec la représentation paramétrique de (d), on aurait $x = 4t + 3 = 7$ et $z = 4 - 2t = 2$, ce qui ne convient pas avec les coordonnées des points M, N et P. Donc $M \notin (d)$, $N \notin (d)$ et $P \notin (d)$.
Par déduction, $\boxed{\text{réponse d.}}$

③ Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ les vecteurs directeurs des droites (d) et (d').
Par lecture des représentations paramétriques, on a $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}3\\-2\\1\end{pmatrix}$.
On remarque que ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles. Ainsi, les droites (d) et (d') ne sont pas parallèles, et donc pas confondues.
Cherchons un point d'intersection. Son paramètre pour (d) et celui pour (d') sont solutions de $\begin{cases} 2+3k = 3+4t \\ -1-2k = 6t \\ 1+k = 4-2t \end{cases} \iff \begin{cases} 4t-3k = -5 \\ 6t+2k = -1 \\ 2t+k = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 4t-3k = -5 \\ -k = -10 \quad L_2 - 3L_3 \\ 2t+k = 3 \end{cases}$

On trouve $k = 10$. Avec la 3e ligne, on a : $t = \dfrac{3-k}{2} = \dfrac{3-10}{2} = -\dfrac{7}{2}$.
Vérifions si ces valeurs sont solutions de la 1e équation :
$4 \times \left(-\frac{7}{2}\right) - 3 \times 10 = -14 - 30 = -44 \neq -5$. Donc (d) et (d') ne sont pas sécantes : $\boxed{\text{réponse b}}$

(4-) La droite (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\6\\-2\end{pmatrix}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à (P). On a donc comme équation de (P) :
$4x + 6y - 2z + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$. Or, $I(2;1;0) \in (P)$ donc :
$4\times 2 + 6\times 1 - 2\times 0 + d = 0$ soit $d = -14$
Donc, (P) a pour équation : $4x + 6y - 2z - 14 = 0$ soit $2(2x+3y-z-7) = 0$
soit $2x + 3y - z - 7 = 0$ donc $\boxed{\text{réponse a}}$.

Exercice 3 :

Partie A : lectures graphiques

(1-) $f'(1)$ est coefficient directeur de (T), la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse 1.
Le coefficient directeur de (T) est, puisqu'elle par A et B : $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$
Donc : $\boxed{f'(1) = \dfrac{-4-(-1)}{0-1} = \dfrac{-3}{-1} = 3}$ Equation de (T) : $y = f'(1)(x-1) + f(1) = 3(x-1) + (-1)$
$\boxed{y = 3x - 4}$.

(2-) Il semble que f soit $\boxed{\text{concave sur }]0;1[\text{ et convexe sur }]1;+\infty[}$.
Il semble que A soit $\boxed{\text{un point d'inflexion de } (\mathcal{C}_f)}$.

Partie B : étude analytique

(1-) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x\ln(x^2) - \dfrac{1}{x} = 2x\ln(x) - \dfrac{1}{x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, or $\lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty$ donc par composition, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x^2) = +\infty$
Donc, par produit, $\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln(x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{1}{x} = 0$ donc par somme $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0$ (croissance comparée) donc par produit, $\lim\limits_{x\to 0^+} 2x\ln(x) = 0$
Pour tout $x \in \mathbb{R}^{*+}$, $-\dfrac{1}{x} \leqslant 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0^+} -\dfrac{1}{x} = -\infty$
Donc, $\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty}$.

(2-) a// Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f(x) = 2x\ln(x) - \dfrac{1}{x}$
Donc : pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) = 2\ln(x) + \dfrac{2x}{x} + \dfrac{1}{x^2}$

$$\boxed{f'(x) = 2\ln(x) + \frac{1}{x^2} + 2.}$$

b// Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{2}{x} - \dfrac{2x}{x^4}$

$$f''(x) = \frac{2x^2}{x^3} - \frac{2}{x^3} = \frac{2(x^2-1)}{x^3}$$

$$\boxed{f''(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x^3}}.$$

(3-) a// On étudie le signe de $f''(x)$ sur $]0;+\infty[$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x^3 > 0$ donc $f''(x)$ est du signe de $(x+1)(x-1)$ sur $]0;+\infty[$ car $2 > 0$.
Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$ et $x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

On a donc :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $x+1$			$+$		
Signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$	‖	$-$	0	$+$	

Ainsi, f'' est positive sur $]1;+\infty[$ donc $\boxed{f \text{ est convexe sur }]1;+\infty[}$.
f'' est négative sur $]0;1[$ donc $\boxed{f \text{ est concave sur }]0;1[}$.

f'' s'annule en 1 donc $(\mathcal{C}_f)$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 1.

b// D'après la question précédente, on a : $f'(1) = 2\ln(1) + \frac{1}{1^2} + 2$

$f'(1) = 3.$

x	0		1		$+\infty$
Signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de f'		$\searrow$	3	$\nearrow$	

Donc : pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f'(x) \geq 1$ donc $\boxed{f'(x) > 0}$.
Aimsi, $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[}$.

4- a// • La fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

• $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty;+\infty[$.

Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, $\boxed{\text{l'équation } f(x)=0 \text{ admet une unique solution } \alpha \text{ sur }]0;+\infty[}$.

b// D'après la calculatrice : $f(1{,}327) \simeq -0{,}003 < 0$

$f(1{,}328) \simeq 0{,}0004 > 0$

Donc : $\boxed{\alpha \simeq 1{,}33 \text{ au centième près}}$.

α est solution de l'équation $f(x)=0$, donc $f(\alpha)=0$

Aimsi, $\alpha \ln(\alpha^2) - \frac{1}{\alpha} = 0$ donc : $\ln(\alpha^2) = \frac{1}{\alpha^2}$, donc : $\exp(\ln(\alpha^2)) = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$

d'où : $\boxed{\alpha^2 = \exp\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)}$

Exercice 4 :

1- $I_0 = \int_0^{\pi} e^{-0x} \sin(x)\,dx = \int_0^{\pi} \sin(x)\,dx$

$I_0 = [-\cos(x)]_0^{\pi} = -\cos(\pi) + \cos(0)$. $\boxed{I_0 = 2}$.

2- a// Pour tout $x \in [0;\pi]$ $\sin(x) \geq 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx} \geq 0$ car la fonction exponentielle est positive sur $\mathbb{R}$.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$, $e^{-nx} \sin(x) \geq 0$

Donc, par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx \geq 0$ (car $0 \leq \pi$).

Aimsi, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0}$.

b// Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} - I_n = \int_0^{\pi} e^{-(n+1)x} \sin(x)\,dx - \int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx$

$= \int_0^{\pi} (e^{-(n+1)x} - e^{-nx}) \sin(x)\,dx$.

$= \int_0^{\pi} (e^{-x} - 1) e^{-nx} \sin(x)\,dx$

Pour tout $x \in [0;\pi]$, $-\pi \leq -x \leq 0$ donc $e^{-x} \leq 1$ car la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$, donc $e^{-x} - 1 \leq 0$

Donc, d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in [0;\pi]$ $(e^{-x}-1)e^{-nx} \sin(x) \leq 0$

Donc, par positivité de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi} (e^{-x}-1) e^{-nx} \sin(x)\,dx \leq 0$ (car $0 \leq \pi$).

Donc, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}, I_{n+1} - I_n \leq 0}$.

c// La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0 d'après les deux questions précédentes, donc $\boxed{\text{la suite } (I_n) \text{ converge}}$ d'après le théorème de convergence des suites monotones.

3- a// Pour tout $x \in [0;\pi]$, $\sin(x) \leq 1$

Pour tout $x \in [0;\pi]$, $n \in \mathbb{N}$, $e^{-nx} \sin(x) \leq e^{-nx}$ car $e^{-nx} \geq 0$

Donc, comme $0 \leq \pi$, par croissance de l'intégrale : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^{\pi} e^{-nx} \sin(x)\,dx \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx$

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{I_n \leq \int_0^{\pi} e^{-nx}\,dx}$.

b// Pour tout $n \geq 1$, $\int_0^{\pi} e^{-nx}dx = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\right]_0^{\pi}$

$\int_0^{\pi} e^{-nx}dx = -\frac{1}{n}e^{-n\pi} + \frac{1}{n}e^{-n\times 0} = \frac{-e^{-n\pi}+1}{n}$

$\boxed{\int_0^{\pi} e^{-nx}dx = \frac{1-e^{-n\pi}}{n}}$.

c// On a donc : pour tout $n \geq 1$, $I_n \leq \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} -n\pi = -\infty$ et $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-n\pi} = 0$

donc, par somme, $\lim\limits_{n\to+\infty}(1-e^{-n\pi}) = 1$

$\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1-e^{-n\pi}}{n} = 0$

Or, on a vu précédemment que : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n \geq 0$.

Donc : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq I_n \leq \frac{1-e^{-n\pi}}{n}$

Donc, d'après le théorème des gendarmes : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0}$

4- a//

• Intégrons par parties de la façon suivante :

Posons : $u'(x) = \sin(x)$ $\quad v(x) = e^{-nx}$

$u(x) = -\cos(x)$ $\quad v'(x) = -ne^{-nx}$

On a donc : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \left[u(x)v(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} u(x)v'(x)dx$.

$I_n = \left[-\cos(x)e^{-nx}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos(x)(-n)e^{-nx}dx$.

$= -\cos(\pi)e^{-n\pi} + \cos(0)e^{-n0} - n\int_0^{\pi}\cos(x)e^{-nx}dx$

$\boxed{I_n = e^{-n\pi} + 1 - nJ_n}$.

• Intégrons maintenant par parties comme ceci :

On pose : $f'(x) = e^{-nx}$ $\quad g(x) = \sin(x)$

$f(x) = -\frac{1}{n}e^{-nx}$ $\quad g'(x) = \cos(x)$.

On donc : pour tout $n \geq 1$, $I_n = \left[f(x)g(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} f(x)g'(x)dx$

$I_n = \left[-\frac{1}{n}e^{-nx}\sin(x)\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\frac{1}{n}e^{-nx}\cos(x)dx$

$= -\frac{1}{n}e^{-n\pi}\sin(\pi) + \frac{1}{n}e^{-n0}\sin(0) + \frac{1}{n}\int_0^{\pi}e^{-nx}\cos(x)dx$

$\boxed{I_n = \frac{1}{n}J_n}$

b// On a donc : pour tout $n \geq 1$, $J_n = nI_n$

Ainsi : pour tout $n \geq 1$, $I_n = 1 + e^{-n\pi} - n(nI_n) = 1 + e^{-n\pi} - n^2 I_n$.

Donc : $(n^2+1)I_n = 1 + e^{-n\pi}$

Ainsi : $\boxed{\text{pour tout } n \geq 1,\ I_n = \frac{1+e^{-n\pi}}{n^2+1}}$.

5-
```
from math import*
def seuil():
    n=0
    I=2
    while I>=0,1:
        n=n+1
        I=(1+exp(-n*pi))/(n*n+1)
    return n
```