Corrigé du bac général 2024
Spécialité Mathématiques – Amérique du Nord – Jour 2

BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

SESSION 2024

MATHÉMATIQUES

Durée de l'épreuve : 4 heures

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

Correction proposée par un enseignant en mathématiques pour le site www.sujetdebac.fr

EXERCICE 1 (5 points)

Partie A

1. On relève les données de l'énoncé :

$P(N) = 22{,}86\% = 0{,}2286$

$P_N(R) = 8{,}08\% = 0{,}0808$

$P_{\overline{N}}(R) = 1{,}27\% = 0{,}0127$

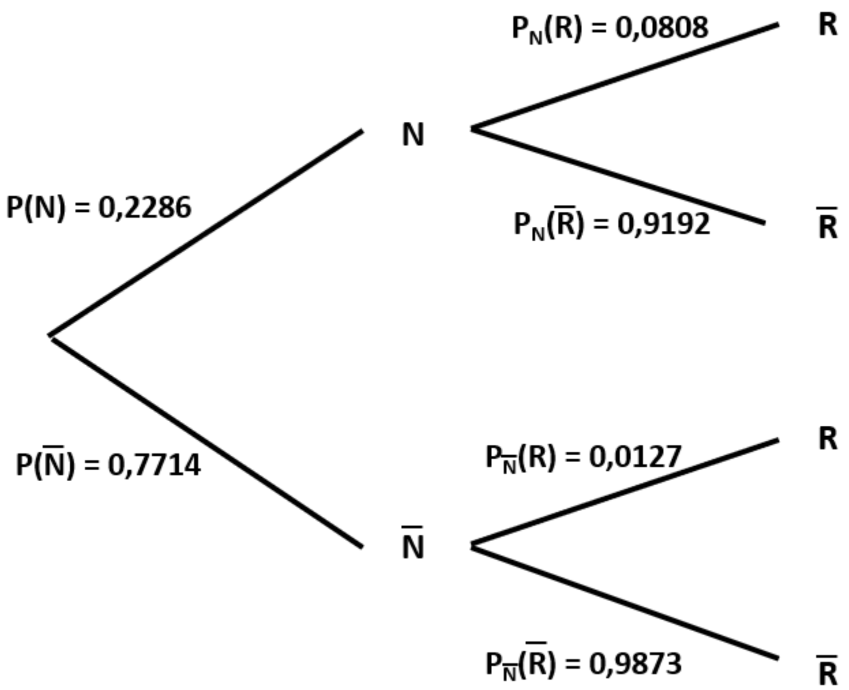
On complète avec les probabilités complémentaires :

$P(\overline{N}) = 1 - P(N) = 0{,}7714$

$P_N(\overline{R}) = 1 - P_N(R) = 0{,}9192$

$P_{\overline{N}}(\overline{R}) = 1 - P_{\overline{N}}(R) = 0{,}9873$

Cela donne l'arbre suivant :



2. $P(N \cap R) = P(N) \times P_N(R) = 0{,}2286 \times 0{,}0808 = 0{,}01846$

3. $P(R) = P(N \cap R) + P(\overline{N} \cap R)$

On sait que : $P(N \cap R) = 0{,}01846$

On calcule : $P(\overline{N} \cap R) = P(\overline{N}) \times P_{\overline{N}}(R) = 0{,}7714 \times 0{,}0127 = 0{,}00980$

Donc : $P(R) = 0{,}01846 + 0{,}00980 = 0{,}0282$

4.

$$P_R(N) = \frac{P(N \cap R)}{P(R)} = \frac{0,01846}{0,0282} = 0,6546$$

Partie B

1. *X* suit une loi binominale B (n=500 ; p=0,65).

2.

$$P(X = 325) = \binom{500}{325} \times 0,65^{325} \times (1 - 0,65)^{500-325} = 0,0374$$

3. $P(X \geq 325) = 1 - \ P(X \leq 324) = 1 - 0,4794 \ = \ 0,5206$

La probabilité qu'au moins 325 véhicules soient neufs parmi le lot de 500 véhicules est d'environ 0,5206.

Partie C

1. $p_n = (1 - 0,65)^n = 0,35^n$

2. On cherche :

$$q_n \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow P(X \geq 1) \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow \ 1 - P(X = 0) \geq 0,9999$$

$$\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 1 - 0,9999$$

$$\Leftrightarrow p_n \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow 0,35^n \leq 0,0001$$

$$\Leftrightarrow ln(0,35^n) \leq ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \times ln(0,35) \leq ln(0,0001)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{ln(0,0001)}{ln(0,35)}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 8,8$$

Ainsi, il faut prendre au minimum *n* = 9.

EXERCICE 2 (5 points)

1. Coordonnées des points :

$F(3{,}0{,}1)$

$H(0{,}1{,}1)$

$M\left(\frac{3}{2},1{,}0\right)$

2.a. On a $\overrightarrow{\mathrm{HM}}\,(\frac{3}{2},0,-1)$, $\overrightarrow{HF}\,(3,-1,0)$ et $\vec{n}\,(2,6,3)$.

Donc $\quad \vec{n}\,.\,\overrightarrow{HM} \;=\; 2\times\frac{3}{2}+6\times 0+3\times(-1)=0.$

Et $\quad \vec{n}\,.\,\overrightarrow{HF} \;=\; 2\times 3+6\times(-1)+3\times 0=0.$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMF). Ainsi, on peut conclure que le vecteur $\vec{n}$ est normal à ce plan.

2.b. Puisque $\vec{n}$ est normal à (HMF), le plan HMF a donc une équation cartésienne qui suit la forme suivante : $2x\;+\;6y\;+3z\;+\;d\;=\;0$

On cherche la valeur du coefficient d en utilisant les coordonnées d'un point du plan, par exemple le point $H(0{,}1{,}1)$:

$$2\,x_H+6\,y_H+3\,z_H+d=0$$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow 2\times 0+6\times 1+3\times 1+d=0\\&\Leftrightarrow 0+6+3+d=0\\&\Leftrightarrow d=-9\end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation cartésienne (HMF) : $2x\;+\;6y\;+3z\;-\;9\;=\;0$

2.c. Un vecteur normal au plan P est : $\vec{m}\,(5,15,-3)$.

$\vec{m}$ n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}$ qui est normal au plan (HMF).

Par conséquent, les plans P et (HMF) ne sont pas parallèles.

3. On connait les coordonnées suivantes : $D(0,1,0)$ et $G(3,1,1)$.

Donc on en déduit : $\overrightarrow{DG}(3,0,1)$.

Une représentation paramétrique de la droite (DG) est donc : $\begin{cases}x\;=\;3t\\y\;=\;1\\z\;=\;t\end{cases}$ avec $t\;\in\;\mathbb{R}$.

4. On cherche à résoudre le système suivant :

$$\begin{cases}x=3t\\y=1\\z=t\\2x+6y+3z-9=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 6t + 6 + 3t - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ 9t = 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 \\ z = t \\ t = 1/3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1/3 \\ t = 1/3 \end{cases}$$

Le point N a donc pour coordonnées : $N(1, 1, \frac{1}{3})$.

5. On vérifie tout d'abord que le point R appartient au plan (HMF) :

$2x_R + 6y_R + 3z_R - 9 = 2 \times 3 + 6 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{2} - 9 = 0$. C'est le cas.

On vérifie ensuite si le vecteur $\overrightarrow{RG}$ est un vecteur normal au plan (HMF).

$$\overrightarrow{RG} = \begin{pmatrix} 3 - 3 = 0 \\ \frac{1}{4} - 1 = \frac{3}{4} \\ \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ce vecteur n'est pas colinéaire au vecteur $\vec{n}(2, 6, 3)$, car ça première coordonnée n'est pas 0.

Nous pouvons conclure que le point R n'est pas le projeté orthogonal de G sur le plan (HMF).

EXERCICE 3 (6 points)

1. Rappel de la fonction g : $g(x) = 2x - x^2$

La fonction g est dérivable sur [0 ; 1] car il s'agit d'une fonction polynôme.

$$g'(x) = 2 - 2x$$

Or $\begin{cases} 2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1 \\ 2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1 \end{cases}$

Donc g est strictement croissante sur [0 ; 1].

Par ailleurs, on a : $\begin{cases} g(0) = 0 \\ g(1) = 1 \end{cases}$

2.

$$u_1 = g\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$
$$u_2 = g\left(\frac{3}{4}\right) = 2 \times \frac{3}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3}{2} - \frac{9}{16} = \frac{24}{16} - \frac{9}{16} = \frac{15}{16}$$

3. On réalise la démonstration par récurrence.

<u>Initialisation :</u>

Pour $n = 0$, on a $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_1 = \frac{3}{4}$

Donc $0 < u_0 < u_1 < 1$

<u>Hérédité :</u>

Supposons que $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ et montrons que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$

On a :

$$\begin{aligned} &0 < u_n < u_{n+1} < 1 \\ &\Leftrightarrow g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1) \\ &\Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1 \end{aligned}$$

<u>Conclusion :</u>

La propriété est vrai pour $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang, donc d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour toute valeur n.

4. Grâce aux questions précédentes, on sait que la suite u_n est croissante et majorée par 1.

Par conséquent, elle converge donc vers une limite $l \leq 1$.

5. On a $u_{n+1} = g(u_n)$ et g est continue sur [0 ; 1].

Par conséquent, l est solution de l'équation suivante :

$$l = g(l)$$
$$\Leftrightarrow l = 2l - l^2$$

$$\Leftrightarrow l^2 - l = 0$$
$$\Leftrightarrow l(l-1) = 0$$
$$\Leftrightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

Puisque u_n est strictement croissante et que $u_0 = \frac{1}{2} > 0$, alors seule la solution $l = 1$ convient.

6.

$v_{n+1} = ln(1 - u_{n+1})$
$= ln(1 - 2u_n + u_n{}^2)$
$= ln((1 - u_n)^2)$
$= 2\,ln(1 - u_n)$
$= 2v_n$

Ainsi, la suite v_n est géométrique de raison 2.

Son premier terme est $v_0 = ln(1 - u_0) = ln(\frac{1}{2}) = -ln(2)$

7. On déduit de la question précédente que $v_n = v_0 \times 2^n = -ln(2) \times 2^n$

8. On a :

$v_n = ln(1 - u_n)$
$\Leftrightarrow e^{v_n} = e^{ln(1-u_n)}$
$\Leftrightarrow 1 - u_n = e^{v_n}$
$\Leftrightarrow u_n = 1 - e^{-ln(2)\times 2^n}$

Or on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} -ln(2) \times 2^n = -\infty$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{-ln2\times 2^n} = 0$

Et par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$

9.

```
def seuil() :
   n=0
   u=0.5
   while u<0.95 :
         n=n+1
         u=2*u-u*u
   return n
```

EXERCICE 4 (4 points)

1. On veut :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow aln(x) = 0$$
$$\Leftrightarrow ln(x) = 0 \; car \; a > 0$$
$$\Leftrightarrow x = 1$$

Ainsi, l'abscisse du point d'intersection de la courbe C et de l'axe des abscisses est $x = 1$.

2. La fonction F est dérivable sur $]0\,; +\infty[$ comme produit et différence de fonctions dérivables sur cet intervalle.

$$F'(x) = a\left(ln(x) + x \times \frac{1}{x} - 1\right) = a(ln(x) + 1 - 1) = f(x)$$

La fonction *F* est bien une primitive de *f* sur l'intervalle étudié.

3. L'air du domaine, notée *D*, est donnée par :

$$D = \int_1^{x_0} f(x)\,dx = [F(x)]_1^{x_0} = F(x_0) - F(1)$$

$$= a(x_0 ln(x_0) - x_0) - a(1ln(1) - 1) = a(x_0 ln(x_0) - x_0 + 1)$$

4. On détermine l'équation de la *T*, la tangente à la courbe *C* au point d'abscisse x_0.

$$y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$$
$$y = \frac{a}{x_0} \times (x - x_0) + aln(x_0)$$
$$y = \frac{a}{x_0} \times x - a + aln(x_0)$$

Le point *A* est le point de la tangente *T* d'abscisse $x_0 = 0$.

Donc :

$$y_A = \frac{a}{x_0} \times x_A - a + aln(x_0) = -a + aln(x_0)$$

Le point *B* est le projeté orthogonal de *M*, donc $x_B = 0$

Et :

$$y_B = y_M = f(x_M) = f(x_0) = aln(x_0)$$

Puisque $a > 0$, on a donc :

$$AB = |y_B - y_A| = |aln(x_0) - (-a + aln(x_0))| = |a| = a$$

Ainsi, la longueur AB est égale à une constante.