CORRIGE – BAC SPE MATHS METROPOLE 2024 JOUR 1

Exercice 1 : Vrai ou faux (fonctions et suites)

1.

Affirmation 1 : Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = 5xe^{-x} = \frac{5x}{e^x}$.

Or, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée, donc $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$ par produit.

Donc, C_f admet pour asymptote horizontale en $+\infty$ la droite d'équation $x = 0$, soit l'axe des abscisses. Donc **l'affirmation est vraie.**

Affirmation 2 : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x} + 5xe^{-x}$

D'où : pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$. Donc f est solution de (E).

Ainsi, **l'affirmation est vraie.**

2.

Affirmation 3 : On pose : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = -1, v_n = \cos(n)$ et $w_n = 1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, -1 \leq \cos(n) \leq 1$, donc $u_n \leq v_n \leq w_n$.

Pourtant, la suite (v_n) n'admet pas de limite en $+\infty$. C'est un contre-exemple.

Donc, **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 4 : On a supposé que la suite (u_n) est croissante. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n$.

De même, comme la suite (w_n) est décroissante, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n \leq w_0$.

Ainsi, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 \leq v_n \leq w_n$.

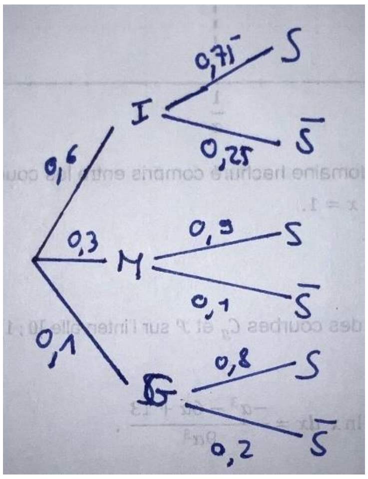
Donc, **l'affirmation est vraie.**

Exercices 2 : Probabilités

D'après l'énoncé : $P(I) = 0{,}6$; $P(M) = 0{,}3$; $P(G) = 0{,}1$; $P_I(S) = 0{,}75$; $P_M(S) = 0{,}9$ et $P_G(S) = 0{,}8$.

1. $P_I(\bar{S}) = 1 - P_I(S) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$; $P_M(\bar{S}) = 1 - P_M(S) = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$ et $P_G(\bar{S}) = 1 - P_G(S) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

On peut donc compléter l'arbre pondéré comme ceci :



2. On cherche $P(I \cap S)$.

$P(I \cap S) = P(I)P_I(S)$ donc $P(I \cap S) = 0{,}6 \times 0{,}75 = 0{,}45$.

La probabilité que la client ait réalisé son achat sur Internet et qu'il soit satisfait du service client et de 0,45.

3. I, M et G forment un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales :

$P(S) = P(I \cap S) + P(M \cap S) + P(G \cap S) = P(I \cap S) + P_M(S)P(M) + P_G(S)P(G)$.

$P(S) = 0{,}45 + 0{,}9 \times 0{,}3 + 0{,}8 \times 0{,}1$ $\quad$ $\boldsymbol{P(S) = 0{,}8}$.

4. On cherche $P_S(I)$.

$P_S(I) = \frac{P(I \cap S)}{P(S)}$ $\quad$ $P_S(I) = \frac{0{,}45}{0{,}8}$ $\quad$ $P_S(I) \approx 0{,}563$ à 10^{-3} près.

La probabilité que le client ait fait son achat sur Internet sachant qu'il est satisfait du service client est d'environ 0,563.

5.
   a. Appeler un client pour savoir s'il est satisfait du service client est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le client est satisfait » de probabilité $P(S) = 0{,}8$.
   On répète 30 fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on suppose que le choix du client est assimilable à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 30$ et $p = 0{,}8$.
   La variable aléatoire X qui compte le nombre de succès (le nombre de clients satisfaits sur la journée) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(30\,;0{,}8)$.

   b. On cherche $P(X \geq 25)$.

$P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - P(X \leq 24)$.

D'après la calculatrice, $P(X \geq 25) \approx 0{,}428$.

La probabilité qu'au moins 25 clients soient satisfaits dans un échantillon de 30 clients contactés sur une même journée est d'environ 0,428.

6. Soit n la taille minimale de l'échantillon et Y la variable aléatoire qui, sur ces n clients contactés en une journée, compte le nombre de clients non satisfaits.

Appeler un client pour savoir s'il est satisfait du service client est une épreuve de Bernoulli dont le succès est « le client n'est pas satisfait » de probabilité $P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 0{,}2$.

On répète n fois cette épreuve de façon identique et indépendante (on suppose que le choix du client est assimilable à un tirage avec remise). On a donc un schéma de Bernoulli de paramètres n et $p = 0{,}2$.

La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès (le nombre de clients non satisfaits sur la journée) suit donc la loi binomiale $\mathcal{B}(n\,;0{,}2)$.

On cherche n tel que $P(Y \geq 1) \geq 0{,}99$

$P(Y \geq 1) = 1 - P(Y < 1) = 1 - P(Y = 0)$.

Comme Y suit $\mathcal{B}(n\,;0{,}2)$, on a : $P(Y \geq 1) = 1 - \binom{n}{0}0{,}2^0(1-0{,}2)^{n-0} = 1 - 0{,}8^n$.

On cherche donc n tel que $1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, 1 - 0{,}8^n \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}8^n \leq 0{,}01 \Leftrightarrow \ln(0{,}8^n) \leq \ln\,(0{,}01)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$.

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}8) \leq \ln(0{,}01) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)}$ car $\ln(0{,}8) < 0$ car $0{,}8 < 1$.

D'après la calculatrice, $\frac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} = 20{,}64$. Donc, n étant entier, il faut $n \geq 21$.

Il faut donc appeler au minimum 21 clients sur une même journée pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux ne soit pas satisfait soit supérieure ou égale à 0,99.

7.

a. Par linéarité de l'espérance, on a : $E(T) = E(T_1 + T_2) = E(T_1) + E(T_2)$

Donc, $E(T) = 4 + 3 \quad \boldsymbol{E(T) = 7}$.

Les variables aléatoires T_1 et T_2 sont indépendantes donc $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2)$.

D'où $V(T) = 2 + 1 \quad \boldsymbol{V(T) = 3}$.

b. On cherche $P(5 \leq T \leq 9) = P(-2 \leq T - E(T) \leq 2) = P(|T - E(T)| \leq 2)$.

Ainsi, $P(5 \leq T \leq 9) = 1 - P(|T - E(T)| > 2) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 3)$ car $T - E(T)$ ne prend que des valeurs entières.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a : $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{V(T)}{3^2}$

D'où : $P(|T - E(T)| \geq 3) \leq \frac{1}{3}$. Ainsi, on a bien : $P(5 \leq T \leq 9) \geq \frac{2}{3}$.

La probabilité que le téléviseur soit reçu entre 5 et 9 jours après la commande est supérieure ou égale à $\frac{2}{3}$.

<u>Exercice 3 :</u> Géométrie dans l'espace

1.

a. Calculons les coordonnées de $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CA}\,(x_A - x_C\,;y_A - y_C\,;z_A - z_C) = (5\,;5\,;-10)$ et de même $\overrightarrow{CD}(x_D - x_C\,;y_D - y_C\,;z_D - z_C) = \left(0\,;0\,;-\frac{25}{2}\right)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires.

D'une part : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CA} = 1 \times 5 - 1 \times 5 + 0 \times (-10) = 0$ donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.

D'autre part : $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{CD} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 0$ donc ces deux vecteurs sont orthogonaux.

Ainsi, $\overrightarrow{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CAD) **donc $\overrightarrow{n_1}$ est un vecteur normal au plan (CAD)**.

b. Comme $\overrightarrow{n_1}$ est normal au plan (CAD), ce plan a pour équation cartésienne $x - y + d = 0$.

On sait que le point C appartient au plan (CAD) donc $x_C - y_C + d = 0$ d'où $d = 0$.

Ainsi, **le plan (CAD) a pour équation cartésienne $x - y = 0$**.

2.

a. On sait que ce point H appartient à $\mathcal{D}$ et à (CAD) donc ses coordonées vérifient le système : $\begin{cases} x_H = \frac{5}{2}t \\ y_H = 5 - \frac{5}{2}t \\ z_H = 0 \\ x_H - y_H = 0 \end{cases}$. On déduit de la troisième équation que $x_H = y_H$. Soit, par substitution avec les deux premières équations : $\frac{5}{2}t = 5 - \frac{5}{2}t$ d'où $t = 1$.

On reporte cela dans les deux premières équations, ce qui donne : $x_H = \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$ et $y_H = 5 - \frac{5}{2} \times 1 = \frac{5}{2}$. Donc, on a bien $H\left(\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\,;0\right)$.

b. On a : $\overrightarrow{HB}\left(-\frac{5}{2}\,;\,\frac{5}{2}\,;0\right)$. On remarque que les coordonnées de $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{n_1}$ sont proportionnelles donc ces deux vecteurs sont colinéaires.

De plus, H appartient au plan (CAD) d'après la question précédente. Ainsi, H est bien le projeté orthogonal de B sur le plan (CAD).

3.

a. On a : $\overrightarrow{AH}\left(-\frac{5}{2}\,;\,-\frac{5}{2}\,;0\right)$ et $\overrightarrow{HB}\left(-\frac{5}{2}\,;\frac{5}{2}\,;0\right)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles, ils définissent donc bien un plan.

$\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{HB} = -\frac{5}{2} \times \left(-\frac{5}{2}\right) - \frac{5}{2} \times \frac{5}{2} + 0 = 0$ donc $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont orthogonaux, donc le triangle AHB est rectangle en H.

b. En prenant AH comme base du triangle AHB, on aura pour hauteur issue de B HB étant donné que AHB est rectangle en H.

Donc, $\mathcal{A}_{AHB} = \frac{AH \times HB}{2}$. Or, $AH = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \frac{5}{\sqrt{2}}$ et $HB = \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2}$ d'où $HB = \frac{5}{\sqrt{2}}$. Donc : $\mathcal{A}_{AHB} = \frac{1}{2} \times \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{5}{\sqrt{2}}$ $\quad \mathcal{A}_{AHB} = \frac{25}{4}$.

L'aire du triangle AHB est bien égale à $\frac{25}{4}$.

4.

a. On a : $\overrightarrow{CO}(0\,;0\,;10)$

$\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 10 \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{CO}.\overrightarrow{BH} = 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \frac{5}{2} + 10 \times 0 = 0$. **Donc (CO) est bien la hauteur du tétraèdre $ABCH$ issue de C.**

b. $V_{ABCH} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{AHB} \times CO$. Or, $CO = \sqrt{0^2 + 0^2 + 10^2} = 10$

Donc, $V_{ABCH} = \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times 10$ $\qquad \boldsymbol{V_{ABCH} = \frac{125}{6}}$**.**

5. Notons d la distance recherchée.

On a : $V_{ABCH} = \frac{1}{3}\mathcal{A}_{ABC} \times d$.

Or, ABC est rectangle en B, donc en prenant AB comme base, on aura BC pour hauteur issue de C du triangle ABC. Ainsi, $\mathcal{A}_{ABC} = AB \times \frac{BC}{2}$.

Or, on a : $\overrightarrow{AB}(-5\,;0\,;0)$ et $\overrightarrow{BC}(0\,;\,-5\,;10)$, donc $AC = \sqrt{(-5)^2 + 0^2 + 0^2} = 5$ et $BC = \sqrt{0^2 + (-5)^2 + 10^2} = \sqrt{125}$, d'où $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{5\sqrt{125}}{2}$.

Ainsi : $d = \frac{3V_{ABCH}}{\mathcal{A}_{ABC}} = 3 \times \frac{125}{6} \times \frac{2}{5\sqrt{125}} = \frac{\sqrt{125}}{5} = \frac{\sqrt{25 \times 5}}{5} = \sqrt{5}$. **La distance du point H au plan (ABC) est égale à $\sqrt{5}$ (soit environ 2,24).**

<u>Exercice 4 :</u> Fonctions

Partie A : étude de la fonction f

1.

a. $\lim\limits_{x\to 0}(x-2) = -2$ et $\lim\limits_{x\to 0}\ln(x) = -\infty$, donc, par produit, $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{2}\ln(x) = -\infty$. Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to +\infty}(x-2) = +\infty$ par somme et $\lim\limits_{x\to +\infty}\ln(x) = +\infty$, d'où par produit $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{2}\ln(x) = +\infty$, donc par somme, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

b. On a admis que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $\boldsymbol{f'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}}$**.**

c. Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$ et $2x > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Donc, pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) > 0$ donc **f est strictement croissante sur $]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.**

d. On a admis que f est deux fois dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) = -\frac{1}{2x^2}$.

Pour tout $x \in]0\ ;\ +\infty[$, $f''(x) \leq 0$ car $2x^2 > 0$, **donc f est concave sur $]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.**

2.

a. On a le tableau de variations suivant :

x	0	α	$+\infty$
Variations de f	$\vert\ -\infty$	$\nearrow\ 0\ \nearrow$	$+\infty$

Sur $]0\ ;\ +\infty[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante.

D'autre part : $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty\ ;\ +\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]\mathbf{0}\ ;\ +\infty[$.**

$f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\ln(1) = -1 < 0$ et $f(2) = 2 - 2 + \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln(2) > 0$ car $2 > 1$.

Donc : $f(1) \leq 0 \leq f(2)$ donc $f(1) \leq f(\alpha) \leq f(2)$ donc $1 \leq \alpha \leq 2$ car f est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$. **Donc $\alpha \in [1\ ;2]$.**

b. D'après le tableau de variations de la question précédente, on peut déduire la tableau de signe suivant :

x	0		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$	|	-	0	+	

c. On a $f(\alpha) = 0$ donc $\alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$ d'où $\frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

Ainsi, $\mathbf{\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)}$.

Partie B : étude de la fonction g

1. Pour tout $x \in]0\,;1]$, $g'(x) = -2 \times \frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4} \times 2x\ln(x) - \frac{1}{4}x^2 \times \frac{1}{x}$
$g'(x) = -\frac{7}{4}x - \frac{1}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) = x\left(\frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}x\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$
Pour tout $x \in]0\,;1]$, $\boldsymbol{g'(x) = xf(\frac{1}{x})}$.

2.
   a. Pour tout $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$, $0 < x < \frac{1}{\alpha}$ donc $\frac{1}{x} > \alpha$ car la fonction inverse est décroissante sur $]0\,;+\infty[$. Comme la fonction f est croissante sur $]0\,;+\infty[$, pour tout $x \in]0\,;\frac{1}{\alpha}[$, $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha)$. Comme $f(\alpha) = 0$, on a bien $\boldsymbol{f\left(\frac{1}{x}\right) > 0}$.
   b. Pour tout $x \in]0\,;1]$, $x > 0$, donc $g'(x)$ est du signe de $\frac{1}{x}$.

Ainsi, on a le tableau suivant :

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
Signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$	|	+	0	-	
Signe de $g'(x)$	|	+	0	-	
Variations de g	|	$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C : un calcul d'aire

1.
   a. Soit h la fonction définie sur $]0\,;1]$ par $h(x) = g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$

Il suffit d'étudier le signe de $h(x)$.

Pour tout $x \in]0\,;1]$, $h(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x) + \frac{7}{8}x^2 - x$

$h(x) = -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$. Or, pour tout $x \in]0\,;1]$, $x^2 \geq 0$ et $\ln(x) \leq 0$ donc, comme $-\frac{1}{4} < 0$, h est positive sur $]0\,;1]$, donc $\boldsymbol{C_g}$ **est au-dessus de** $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ **sur** $\boldsymbol{]0\,;1]}$.

   b. Calculons, en intégrant par parties $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2\ln(x)\,dx$

Première méthode :

On pose : $u'(x) = x^2$ et $v(x) = \ln(x)$. On a donc $u(x) = \frac{x^3}{3}$ et $v'(x) = \frac{1}{x}$.

Ainsi : $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^3}{3} \times \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha) - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \frac{x^2}{3} dx$

$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{3\alpha^3} 2(2-\alpha) - \left[\frac{x^3}{9}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} = \frac{12-6\alpha}{9\alpha^3} - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$

Donc : $\boldsymbol{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}}$

Autre méthode plus compliquée :

On pose : $u'(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x^2$. On a donc $v'(x) = 2x$ et $u(x) = \int_1^x \ln(t)dt$.

On intègre par parties cette nouvelle intégrale. On pose $\beta'(t) = 1$ et $\gamma(t) = \ln(t)$. Ainsi : $\beta(t) = t$ et $\gamma'(t) = \frac{1}{t}$.

Ainsi, pour tout $x \in]0\,;\, +\infty[$, $u(x) = [t\ln(t)]_1^x - \int_1^x \frac{t}{t} dt = x\ln(x) - [t]_1^x$

$u(x) = x\ln(x) - x + 1.$

On en déduit l'intégrale que l'on cherchait précédemment :

$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = [x^2(x\ln(x) - x + 1)]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} 2x(x\ln(x) - x + 1)dx$

$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 \left(-\frac{1}{\alpha}\ln(\alpha) - \frac{1}{\alpha} + 1\right) - 2\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx - 2\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} (x - x^2)dx$

Donc, $3\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{2}{\alpha^3}(2-\alpha) + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} - 2\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$

Ainsi, $\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{1}{3}\left(\frac{4}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^2} - 1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{\alpha^2} - \frac{2}{3\alpha^3}\right) = \frac{\frac{1}{3}(12-6\alpha+3-3\alpha-3\alpha^3+2\alpha^3+3\alpha-2)}{3\alpha^3}$

$\boldsymbol{\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx = \frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{9\alpha^3}}$.

2. L'aire $\mathcal{A}$ est comprise entre C_g et $\mathcal{P}$ et est donc égale à l'intégrale de la différence des fonctions qu'elles représentent (on fait la différence de leurs intégrales respectives).

Ainsi, cela revient à calculer l'intégrale de h entre $\frac{1}{\alpha^2}$ et 1

$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha^2}}^{1} h(x)dx = \int_{\frac{1}{\alpha^2}}^{1} -\frac{1}{4}x^2\ln(x)dx = -\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{\alpha^2}}^{1} x^2\ln(x)dx$

Ainsi, d'après la question précédente, $\boldsymbol{\mathcal{A} = -\frac{-\alpha^3-6\alpha+13}{36\alpha^3}}$.