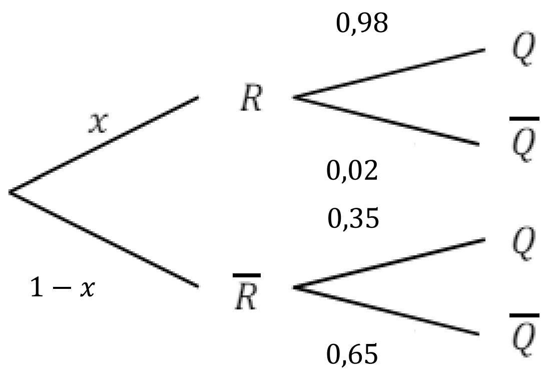
CORRIGE – BAC SPE MATHS METROPOLE 2024 JOUR 2

Exercice 1 : probabilités

D'après l'énoncé : $P(Q) = 0{,}917, P_R(Q) = 0{,}98$ et $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$.

1. D'après l'énoncé, $\boldsymbol{P(Q) = 0{,}917}$ et $\boldsymbol{P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65}$.
2.
   a. $P(\bar{R}) = 1 - P(R) = 1 - x$. $P_R(Q) = 0{,}98$ donc $P_R(\bar{Q}) = 1 - P_R(Q) = 0{,}02$.
   $P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}65$ donc $P_{\bar{R}}(Q) = 1 - P_{\bar{R}}(\bar{Q}) = 0{,}35$. On a donc :



   b. R et $\bar{R}$ forment un système complet d'événements.

Donc, d'après la formule des probabilités totales : $P(Q) = P(Q \cap R) + P(Q \cap \bar{R})$

Donc : $P(Q) = P_R(Q)P(R) + P_{\bar{R}}(\bar{Q})P(\bar{R})$.

Ainsi, on a : $0{,}917 = 0{,}98x + 0{,}35(1 - x) = 0{,}63x + 0{,}35$.

Ainsi : $x = \frac{0{,}567}{0{,}63}$ $\quad\boldsymbol{x = 0{,}9}$.

3. On cherche $P_Q(R)$.

$P_Q(R) = \frac{P(R \cap Q)}{P(Q)} = \frac{P_R(Q) \times P(R)}{P(Q)}$. Or, $P(R) = x = 0{,}9$.

Ainsi, $P_Q(R) = \frac{0{,}98 \times 0{,}9}{0{,}917}$ $\qquad P_Q(R) \approx 0{,}962$ à 10^{-3} près.

La probabilité que l'étudiant interrogé ait réussi l'examen sachant qu'il a répondu « oui » à la question est d'environ 0,962.

4. Soit n la note recherchée. n est tel que $P(N \geq n) \geq 0{,}65$.

$P(N \geq n) = 1 - P(N < n) = 1 - P(N \leq n - 1)$ car la variable aléatoire N ne prend que des valeurs entières.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, P(N \geq n) \geq 0{,}65 \Leftrightarrow 1 - P(N \leq n - 1) \geq 0{,}65 \Leftrightarrow P(N \leq n - 1) \geq 0{,}35$

D'après la calculatrice, $P(N \leq 10) \approx 0{,}203 < 0{,}35$ et $P(N \leq 11) \approx 0{,}351 \geq 0{,}35$.

Ainsi, il faut que $n-1=11$, donc que $n=12$, pour que 65% des étudiants soient récompensés. **Donc, la directrice doit récompenser les étudiants qui ont eu au moins 12/20.**

5. Par linéarité de l'espérance, $E(S)=E(N_1)+E(N_2)+\cdots+E(N_{10})$. Or, ces 10 variables aléatoires ont toutes la même loi, donc la même espérance.

Ainsi, $E(N_1)=E(N_2)=\cdots=E(N_{10})$, donc $E(S)=10E(N_1)$.

Or, N_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(i,p)$ avec $i=20$ et $p=0{,}615$. Donc, $E(N_1)=ip$.

Ainsi, $E(S)=10ip=10\times 20\times 0{,}615$ $\quad \boldsymbol{E(S)=123}$.

On sait que les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ sont indépendantes.

Ainsi, $V(S)=V(N_1)+V(N_2)+\cdots+V(N_{10})$. Or, les variables aléatoires $N_1, N_2, \dots, N_{10}$ suivent toutes la même loi, donc ont toutes la même variance.

Donc, $V(N_1)=V(N_2)=\cdots=V(N_{10})$, donc $V(S)=10V(N_1)$. Comme N_1 suit la loi binomiale $\mathcal{B}(i,p)$, $V(N_1)=ip(1-p)$.

Ainsi, $V(S)=10ip(1-p)=10\times 20\times 0{,}615\times(1-0{,}615)$ $\quad \boldsymbol{V(S)=47{,}355}$.

6.

a. ***M* représente la moyenne des notes des 10 étudiants interrogés au hasard.**

b. Par linéarité de l'espérance, $E(M)=E\left(\frac{S}{10}\right)=\frac{1}{10}E(S)$.

Donc, $E(M)=\frac{1}{10}\times 123$ $\quad \boldsymbol{E(M)=12{,}3}$.

D'autre part, $V(M)=V\left(\frac{S}{10}\right)=\frac{1}{10^2}V(S)$. Donc, $V(M)=\frac{47{,}355}{100}$ $\quad \boldsymbol{V(M)=0{,}473\,55}$.

c. On cherche $P(10{,}3<M<14{,}3)$

$P(10{,}3<M<14{,}3)=P(10{,}3-E(M)<M-E(M)<14{,}3-E(M))$

$P(10{,}3<M<14{,}3)=P(-2<M-E(M)<2)=P(|M-E(M)|<2)$.

Donc, $P(10{,}3<M<14{,}3)=1-P(|M-E(M)|\geq 2)$.

Or, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(|M-E(M)|\geq 2)\leq \frac{V(M)}{2^2}$.

Donc : $P(|M-E(M)|\geq 2)\leq 0{,}118\,387\,5\leq 0{,}2$. Donc, $1-P(|M-E(M)|\geq 2)\geq 0{,}8$.

Donc : $P(10{,}3<M<14{,}3)\geq 0{,}8$.

Ainsi, **la probabilité que la moyenne des notes des dix étudiants pris au hasard soit strictement comprise entre 10,3 et 14,3 est d'au moins 80%.**

<u>Exercice 2 :</u> suites et fonctions

Partie A : étude d'un modèle discret

1. Notons T_{Cl} le taux de chlore dans l'eau après ajout des 15 mg de chlore, et T_0 le taux de chlore initial. m_{Cl} est la masse de chlore alors présente dans l'eau après l'ajout, et m_0 celle présente initialement. Soit $V_{piscine}$ le volume d'eau dans la piscine.

$T_{Cl} = \frac{m_{Cl}}{V_{piscine}}$. Or, le volume d'eau dans la piscine reste constant au moment de l'ajout de chlore.

On a, en notant $m_{ajout} = 15g$ la masse de chlore ajoutée, $m_{Cl} = m_0 + m_{ajout}$.

Donc, $T_{Cl} = \frac{m_{ajout}+m_0}{V_{piscine}} = \frac{m_0}{V_{piscine}} + \frac{m_{ajout}}{Vpiscine} = T_0 + \frac{m_{ajout}}{V_{piscine}}$.

Ainsi, $T_{Cl} - T_0 = \frac{m_{ajout}}{V_{piscine}} = \frac{15\ 000}{50\times1000}$ car $15g = 15\ 000mg$.

Donc, $T_{Cl} - T_0 = 0{,}3\ mg.L^{-1}$. Ainsi, **cet ajout fait bien augmenter le taux de chlore de 0,3 mg.L^{-1}.**

2.
   a. Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

<u>Initialisation :</u> $v_0 = 0{,}7$ $v_1 = 0{,}92v_0 + 0{,}3 = 0{,}944$, or $0{,}7 \leq 0{,}944 \leq 4$, donc $v_0 \leq v_1 \leq 4$.

Donc, la propriété est vraie pour $n = 0$.

<u>Hérédité :</u> Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que la propriété soit vraie au rang n. Montrons que la propriété est vraie au range $n + 1$.

D'après l'hypothèse de récurrence, $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

On multiplie par 0,92 > 0. On a : $0{,}92v_n \leq 0{,}92v_{n+1} \leq 3{,}68$

On ajoute 0,3. On a : $0{,}92v_n + 0{,}3 \leq 0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 \leq 3{,}98$.

Or : par définition, $0{,}92v_n + 0{,}3 = v_{n+1}$ et $0{,}92v_{n+1} + 0{,}3 = v_{n+2}$. De plus, $3.98 \leq 4$.

Ainsi, $v_{n+1} \leq v_{n+2} \leq 4$.

Donc, la propriété est héréditaire.

<u>Conclusion :</u> la propriété est vraie pour $n = 0$ et elle est héréditaire, donc, d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1} \leq 4$.

   b. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_{n+1}$ donc la suite (v_n) est croissante. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq 4$. Donc la suite (v_n) est majorée par 4. Donc, d'après le théorème de convergence des suites monotones, **la suite (v_n) converge vers $l \leq 4$.**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 0{,}92x + 0{,}3$.

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ comme fonction affine.

Pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 0{,}92v_n + 0{,}3 = f(v_n)$.

La suite (v_n) converge vers l.

Donc, d'après le théorème du point fixe, l est solution de l'équation $f(x) = x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = x \Leftrightarrow 0{,}92x + 0{,}3 = x \Leftrightarrow 0{,}08x = 0{,}3 \Leftrightarrow x = \frac{0{,}3}{0{,}08} = 3{,}75$.

Ainsi, $\boldsymbol{l = 3,75}$.

3. D'après la question précédente, le taux de chlore va se stabiliser à long terme autour de 3,75 mg.L^{-1}. Or, 3,75>3, donc **le taux de chlore dans l'eau ne sera, à long terme, pas conforme aux exigences des piscinistes**.
4.

```python
def alerte_chlore(s):
    n=0
    v=0.7
    while v<=s:#on veut n tel que v_n dépasse strictement s
        n=n+1
        v=0.92*v+0.3 #relation de récurrence sur (v_n)
    return n
```

5. Cette instruction renvoie le plus petit entier n tel que $v_n > 3$.
D'après la calculatrice, $v_{16} \approx 2{,}95 \leq 3$ et $v_{17} \approx 3{,}01 > 3$. Donc, **cette instruction renvoie la valeur 17.** Cela signifie que le taux de chlore dans l'eau dépassera 3 et sortira donc de l'intervalle préconisé par les piscinistes après 17 jours.

Partie B : étude d'un modèle continu

1. Soit (E_H) l'équation homogène associée à (E). On a donc $(E_H) : y' = -0{,}08y$.
$$(E_H) \Leftrightarrow y' + 0{,}08y = 0$$
(E_H) est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 0{,}08$.
Les solutions de (E_H) sont de la forme $x \mapsto Ce^{-0{,}08x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

On cherche maintenant une solution particulière constante, que l'on notera h.
h est constante, donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, h'(x) = 0$.
h est solution de (E) donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, h'(x) = -0{,}08h(x) + \frac{q}{50}$.
Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}, 0{,}08h(x) = \frac{q}{50} \quad h(x) = \frac{q}{4}$.

Donc, l'ensemble des solutions de (E) est $S = \left\{x \mapsto Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4} \,\middle|\, C \in \mathbb{R}\right\}$.
f est solution de (E) donc **$\boldsymbol{f}$ est de la forme $\boldsymbol{f(x) = Ce^{-0,08x} + \frac{q}{4}}$ où $\boldsymbol{C}$ est une constante réelle.**

2.

a. $\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}08x = -\infty$ or $\lim\limits_{X\to-\infty} e^X = 0$ donc par composition, puis produit, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} Ce^{-0{,}08x} = 0$. Donc, par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}}$.

b. On cherche C et q telles que : $f(0) = 0{,}7$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 2$.
Or, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \frac{q}{4}$. Donc, on veut : $\frac{q}{4} = 2$, donc il faut que $\boldsymbol{q = 8}$.
On a, d'autre part, $f(0) = Ce^{-0{,}08\times 0} + \frac{q}{4} = C + \frac{q}{4}$. On veut donc que $C + \frac{q}{4} = 0{,}7$.
Donc, $C = 0{,}7 - \frac{q}{4} = 0{,}7 - \frac{8}{4}$ $\quad \boldsymbol{C = -1{,}3.}$

<u>Exercice 3 :</u> fonctions

Partie A : exploitation du graphique

1. Pour trouver $f(-1)$, il suffit de lire graphiquement l'ordonnée du point B, qui est le point d'abscisse -1 de C_f. Ainsi, par lecture graphique, $\boldsymbol{f(-1) = -2.}$

$f'(-1)$ est le coefficient directeur de la tangente à C_f au point d'abscisse -1. C'est donc le coefficient directeur de T. Or, T passe par les points A et B qui sont distincts.

Ainsi, on a : $f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2+1}{-1-0}$ $\quad$ $\boldsymbol{f'(-1) = 1.}$

2. On observe que la tangente à C_f au point d'abscisse $-1{,}4$ est au-dessus de C_f, donc C_f n'est pas convexe sur son ensemble de définition.
3. Il semble que C_f ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses, ce qui signifie qu'il semble que l'équation $f(x) = 0$ ait une unique solution. Par lecture graphique, on peut conjecturer que cette solution est environ égale à 0,1 à 10^{-1} près.

Partie B : étude de la fonction $\boldsymbol{f}$

1. $\lim\limits_{x \to -2} x + 2 = 0$. Or, $\lim\limits_{X \to 0} \ln(X) = -\infty$, donc par composition, $\lim\limits_{x \to -2} \ln(x+2) = -\infty$.
$\lim\limits_{x \to -2} x^2 + 2x - 1 = (-2)^2 + 2 \times (-2) - 1 = -1$.

Donc, par somme, $\boldsymbol{\lim\limits_{x \to -2} f(x)} = -\infty$.

Ainsi, C_f admet pour asymptote verticale la droite d'équation $x = -2$.

2. f est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ comme somme des fonctions dérivables ou composées de fonctions dérivables.

Pour tout $x \in\,]-2\,;\,+\infty[$, $f'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+2}$ $\qquad$ $f'(x) = \frac{2x(x+2)+2(x+2)+1}{x+2}$

Pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $\boldsymbol{f'(x) = \frac{2x^2+6x+5}{x+2}}$**.**

3. Pour tout $x \in\,]-2\,;\,+\infty[$, $x > -2$ donc $x + 2 > 0$.

Ainsi, $f'(x)$ est du signe de $2x^2 + 6x + 5$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Etudions le signe de $2x^2 + 6x + 5$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times 2 \times 5 = 36 - 40 = -4$. $\quad$ $\Delta < 0$ donc aucune racine.

Comme 2 > 0, on a : pour tout $x \in\,]-2\,;\,+\infty[$, $2x^2 + 6x + 5 > 0$.

Donc, pour tout $x \in\,]-2\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$

On a donc :

x	-2		α		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	|		$+$		
Variations de f	| $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Sur $]-2\,;\,+\infty[$, la fonction f est continue (car dérivable) et strictement croissante. $\lim\limits_{x\to-2} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $0 \in]-\infty\,;\,+\infty[$.

Donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, **l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]-2\,;\,+\infty[$.**

D'après la calculatrice, $f(0{,}117) \approx -0{,}002 < 0$ et $f(0{,}118) \approx 0{,}000\,4 > 0$. Donc, comme f est croissante sur $]-2\,;\,+\infty[$, on en déduit que $0{,}117 \le \alpha \le 0{,}118$, donc $\boldsymbol{\alpha \approx 0,12}$ à 10^{-2} près.

5. D'après le tableau de variations, on a le tableau de signe suivant :

x	-2		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$	|	$-$	0	$+$	

6. f' est dérivable sur $]-2\,;\,+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $f''(x) = \frac{(4x+6)(x+2)-(2x^2+6x+5)}{(x+2)^2} = \frac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$.

Pour tout $x \in]-2\,;\,+\infty[$, $(x+2)^2 > 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $2x^2+8x+7$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Etudions le signe de $2x^2+8x+7$ sur $]-2\,;\,+\infty[$.

Calcul du discriminant : $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times 7 = 64 - 56 = 8$. $\Delta > 0$ donc 2 racines que l'on note x_1 et x_2.

$x_1 = \frac{-8+\sqrt{8}}{4} = \frac{-8+2\sqrt{2}}{4} = -2 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x_2 = \frac{-8-\sqrt{8}}{4} = \frac{-8-2\sqrt{2}}{4} = -2 - \frac{\sqrt{2}}{2} < -2$.

2 > 0 donc, on a :

x	-2		$-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
Signe de $2x^2+8x+7$		$-$	0	$+$	
Signe de $f''(x)$	|	$-$	0	$+$	

Ainsi, f'' s'annule une unique fois en changeant de signe (en $-2+\frac{\sqrt{2}}{2}$). Donc, $\boldsymbol{C_f}$ **admet un unique point d'inflexion : le point d'abscisse $\boldsymbol{-2+\frac{\sqrt{2}}{2}}$.**

Partie C : une distance minimale

1. Le point M a pour coordonnées $(x\ ;g(x))$ et le point J a pour coordonnées $(0\ ;1)$. Ainsi, $\overrightarrow{JM}(x\ ;g(x)-1)$.

Ainsi, pour tout $x>-2, JM^2=\left(\sqrt{x^2+(g(x)-1)^2}\right)^2$ donc, $\boldsymbol{JM=x^2+[\ln(x+2)-1]^2}$.

2.
   a. Pour tout $x\in]-2\ ;\ +\infty[, x>-2$ donc $x+2>0$, et $2>0$ donc $h'(x)$ est du signe de $f(x)$ sur $]-2\ ;\ +\infty[$.

On a donc :

x	-2		α		$+\infty$
Signe de $f(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Signe de $h'(x)$	$\vert$	$-$	0	$+$	
Variations de h	$\vert$	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

   b. D'après le tableau de variations, h admet un minimum en α. Ainsi, JM^2 est minimale lorsque $x=\alpha$. Comme la fonction racine carrée est croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$, $\boldsymbol{JM}$ **est minimale pour $\boldsymbol{x=\alpha}$.**

3.
   a. On sait que $f(\alpha)=0$, donc $\alpha^2+2\alpha-1+\ln(\alpha+2)=0$.

Ainsi, $\boldsymbol{\ln(\alpha+2)=1-2\alpha-\alpha^2}$.

   b. Le coefficient directeur de la tangente à C_g au point d'abscisse α et $g'(\alpha)$.

La fonction g est dérivable sur $]-2\ ;\ +\infty[$ comme composée de fonctions dérivables.

Pour tout $x\in]-2\ ;\ +\infty[, g'(x)=\frac{1}{x+2}$. Donc, $g'(\alpha)=\frac{1}{\alpha+2}$.

La droite (JM_α) passe par les points J et M_α de coordonnées respectives $(0\ ;1)$ et $(\alpha\ ;g(\alpha))$.

Ainsi, le coefficient directeur de (JM_α) est $\frac{y_J-y_{M_\alpha}}{x_J-x_{M_\alpha}}=\frac{1-g(\alpha)}{-\alpha}=-\frac{1-\ln(\alpha+2)}{\alpha}=-\frac{1-1+2\alpha+\alpha^2}{\alpha}$ d'après la question précédente.

Ce coefficient directeur vaut donc $-(2+\alpha)$.

Ainsi, le produit des coefficients directeurs respectifs de la tangente à C_g au point d'abscisse α et de (JM_α) vaut : $-(2+\alpha)\times\frac{1}{\alpha+2}=-1$. Ainsi, **la tangente à $\boldsymbol{C_g}$ au point d'abscisse $\boldsymbol{\alpha}$ et la droite $\boldsymbol{(JM_\alpha)}$ sont perpendiculaires.**

<u>Exercice 4 :</u> Vrai ou faux (géométrie dans l'espace)

Affirmation 1 :

On a $\overrightarrow{AC}(x_C - x_A\,; y_C - y_A\,; z_C - z_A)$ donc $\overrightarrow{AC}(2\,; 4\,; 1)$

De plus, $\overrightarrow{AD}(x_D - x_A\,; y_D - y_A\,; z_D - z_A)$ donc $\overrightarrow{AD}(-2\,; 0\,; 4)$

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires. Ainsi, les points A, C et D ne sont pas alignés et définissent donc un plan.

$8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 16 - 0 + 0 - 16 = 0$ donc $A \in \mathcal{P}$.

$8x_C - 5y_C + 4z_C - 16 = 32 - 20 + 4 - 16 = 0$ donc $C \in \mathcal{P}$.

$8x_D - 5y_D + 4z_D - 16 = 0 - 0 + 16 - 16 = 0$ donc $D \in \mathcal{P}$.

Les points A, C et D (non alignés) appartiennent au plan $\mathcal{P}$, donc ils définissent ce plan.

Ainsi, **l'affirmation est vraie.**

Affirmation 2 :

$8x_B - 5y_B + 4z_B - 16 = 0 - 20 + 12 - 16 = -24 \neq 0$ donc $B \notin \mathcal{P}$. Ainsi, le point B n'appartient pas au plan défini par les points A, C et D (d'après l'affirmation 1). Ainsi, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Donc, **l'affirmation est fausse.**

Affirmation 3 :

La droite (AC) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{AC}$ de coordonnées $(2\,; 4\,; 1)$ et passe par le point A de coordonnées $(2\,; 0\,; 0)$. Ainsi, la droite (AC) a pour représentation paramétrique.

$$\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = 4t \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

La droite (BH) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{BH}$ de coordonnées $(x_H - x_B\,; y_H - y_B\,; z_H - z_B)$, soit $(-1\,;\ -3\,;\ -1)$ et passe par le point B de coordonnées $(0\,; 4\,; 3)$.

$$\begin{cases} x = -t' \\ y = 4 - 3t' \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = 3 - t' \end{cases}$$

Les droites (AC) et (BH) ne sont pas parallèles car leurs vecteurs directeurs ne sont pas colinéaires.

Les droites (AC) et (BH) sont sécantes si et seulement si, le système suivant a une solution.

$$\begin{cases} 2+2t=-t' \\ 4t=4-3t' \\ t=3-t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t=-t' \\ 4t=4-3t' \\ -t'=t-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2+2t=t-3 \\ 4t=4-3t' \\ t'=3-t \end{cases} \text{ par substitution.}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t=-5 \\ 4t=4-3t' \\ t'=3-t=3+5=8 \end{cases}$$

Vérifions la deuxième équation avec $t=-5$ et $t'=8$.

D'une part : $4t=-20$ et d'autre part $4-3t'=4-24=-20$. Ainsi, la deuxième équation est vérifiée, donc le système admet une solution. Ainsi, les droites (AC) et (BH) sont sécantes.

Ainsi, **l'affirmation est vraie.**

Affirmation 4 :

Vérifions si le point H appartient au plan (ABC).

$x_H-y_H+2z_H-2=-1-1+4-2=0$ donc $H\in(ABC)$.

Montrons que le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est normal au plan (ABC).

On a : $\overrightarrow{DH}(x_H-x_D\,;y_H-y_D\,;z_H-z_D)$ donc $\overrightarrow{DH}(-1\,;1\,;\,-2)$.

Par lecture sur l'équation cartésienne du plan (ABC), le vecteur normal $\vec{n}$ au plan (ABC) a pour coordonnées $(1\,;\,-1\,;2)$. Donc, $\overrightarrow{DH}=-\vec{n}$.

Donc, le vecteur $\overrightarrow{DH}$ est normal au plan (ABC).

Ainsi, le point H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).

Donc, **l'affirmation est vraie**.